фициенты усиления и поглощения, b – отношение интенсивностей насыщения усиления и поглощения (интенсивность измеряется в единицах интенсивности насыщения усиления). Коэффициент нерезонансного поглощения в (2) выбран единичным за счет указанной выше нормировки продольной координаты z.

Поскольку мы рассматриваем случай жесткого возбуждения, при малых интенсивностях суммарное поглощение должно превышать усиление, так что

$$\operatorname{Re} f_0 < 0, \quad f_0 = f(0). \tag{3}$$

В рассматриваемом далее случае аномальной дисперсии за счет выбора масштаба τ можно положить $D = -1$. Тогда уравнение (1) запишется более компактно:

$$\frac{\partial E}{\partial z} - i\Delta_3 E = f(|E|^2)E, \tag{4}$$

где введен трехмерный оператор Лапласа

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}. \tag{5}$$

Рассмотрим сначала случай нулевых расстроек ($\Delta_g = \Delta_a = 0$, функция $f(I)$ вещественна) и сферически симметричных (в пространстве x, y, τ) стационарных структур. Для них

$$E = A(r)\exp(-i\alpha z), \quad \Delta_3 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}, \tag{6}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + \tau^2}$ и α – искомый сдвиг постоянной распространения, играющий роль собственного значения для вытекающего из (3) уравнения

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dA}{dr} + [\alpha - if(|A|^2)]A = 0 \tag{7}$$

с граничными условиями конечности A при $r = 0$ и достаточно быстрого убывания A вдали от центра солитона ($A(r) \longrightarrow 0$ при $r \longrightarrow \infty$). Более точно для интересующих нас распределений поля его асимптотика на бесконечности следует из уравнения (7) при замене $f \longrightarrow f_0 = \text{const}$. Если ввести вместо r комплексную переменную $\rho = r\sqrt{-\alpha + if_0}$ (выбирается ветвь корня с положительной вещественной частью), то вместо (7) имеем

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dA}{d\rho} + A = 0.$$

Искомая асимптотика дается решением этого уравнения

$$A = \frac{C}{\rho}\exp(-\rho) = \frac{C}{r\sqrt{-\alpha + if_0}}\exp(-r\sqrt{-\alpha + if_0}). \tag{8}$$

Ввиду произвольности общей фазы постоянную C можно считать вещественной.

Произвольность фазы позволяет понизить порядок обыкновенного дифференциального уравнения (7) [5]. Для этого введем вещественные амплитуду и фазу

$$A(r) = a(r)\exp(i\theta(r)) \tag{9}$$

и вещественные переменные

$$p = \frac{1}{a}\frac{da}{dr}, \quad q = \frac{d\theta}{dr} \tag{10}$$

(полагаем $a \neq 0$). Тогда получим систему трех вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da}{dr} = ap, \quad \frac{dp}{dr} = -p^2 + q^2 - 2\frac{p}{r} - \alpha, \qquad \frac{dq}{dr} = -2pq - 2\frac{q}{r} + f(a^2). \tag{11}$$

Для рассматриваемого симметричного решения должны выполняться условия

$$p(0) = 0, \quad q(0) = 0. \tag{12}$$

Эти условия вместе с условиями на бесконечности (8) позволяют из решения (11) найти как собственные значения α, так и радиальные профили характеристик "пули". Такая задача решалась численно. Для этого задавались некоторые значения параметров α и C и при достаточно большом значении $r = r_\infty$ определялись величины a, p и q по соотношениям (8)–(10). Затем методом Рунге–Кутта 4-го порядка решалась система (11) и определялись величины $p(0)$ и $q(0)$ (более точно, ввиду сингулярности уравнений (11) при $r = 0$ численное интегрирование заканчивалось при некотором достаточно малом значении r). Последующее наложение двух условий (12) позволяет определить параметры α и C.

Результаты расчетов, выполненных при $a_0 = 2$ и $b = 10$, приведены на рис. 1. Оказывается, что имеется большое число ветвей (на рисунке изображены три из них) симметричных локализованных структур с различным характером радиального профиля амплитуды, включающего осцилляции (см. вставки на рисунке). Все ветви стартуют из одной и той же точки на плоскости α, g_0 ($\alpha = 0$, $g_0 = 1 + a_0 = 3$, что отвечает границе устойчивости безгенерационного режима $A = 0$). Судя по расчетам, все ветви имеют тенденцию заканчиваться в одной и той же точке, отвечающей предельной точке аналогичной спирали для одномерных лазерных локализованных структур (см. [5]). В этой предельной точке ширина локализованных структур стремится к бесконечности, так что геометрическая размерность структуры несущественна. Только на одной из ветвей *1* (с глад-